

・研究原著・

# 实现稀疏角度下的精确CT重建:利用ADMM-LP算法求解非凸模型

宋 洁,陈 平,潘晋孝(中北大学信息探测与处理山西省重点实验室,中北大学,山西省太原市 030051) DOI:10.3969/j.issn.2095-4344.0563 ORCID: 0000-0001-5554-8549(宋洁)

#### 文章快速阅读:



### 文题释义:

LP 范数: 定义向量的 LP 范数为:  $\| X \|_{p} = (X_1^{p} + X_2^{p})^{1/p}$ 。根据压缩感知理论, 对于 CT 重建模型可以 由一个保真项与一个正则项构成, 以稀疏图像的 LP 范数为正则项的重建模型, 可获取相较传统 TV 正则项 更稀疏的解, 使得在投影角度稀疏的条件下获取质量更高的重建图像。

**交替方向乘子(ADMM)算法:** ADMM 法是一种求解优化问题的计算框架,通过分解协调过程,将大的全局问题分解为多个较小、较容易求解的局部子问题,并通过协调子问题的解而得到大的全局问题的解。在文中利用交替方向乘子法将多变量的非凸优化问题转化为针对子问题的优化问题,降低计算复杂度的同时减少求解难度。

#### 摘要

**背景**:稀疏角度投影重建是减小 CT 辐射剂量的有效方法,但因其重建质量的问题限制了该方法的应用。 目的:研究基于 LP 范数的交替方向乘子-CT 重建算法,旨在提高稀疏角度下的重建质量。

方法:将 CT 重建模型中的全变分正则项替换为非凸非光滑的 LP 范数正则项,并利用增广拉格朗日法将约 束问题转化为无约束问题,再利用交替方向乘子框架结合广义收缩算法将原优化模型拆分为等价于原问题 的子问题,最后迭代求解各子问题。

结果与结论:①通过仿真及实际实验,对比分析了全变分-凸集投影、代数重建-LP、Split-Bregman-LP 以及所提算法在 36 个稀疏角度下的重建结果,结果显示论文提出的算法重建图像细节更完整,均方根误差更低,而且速度比 Split-Bregman-LP 快 1 倍;②说明提出的基于 LP 范数的交替方向乘子-LP 算法,在投影角度稀疏情况下的重建结果具有较高的重建精度。

### 关键词:

X-CT 稀疏角度重建; LP 范数; 交替方向乘子法; 广义收缩算法; 迭代优化算法; 国家自然科学基金 主题词:

辐射剂量;体层摄影术,X线计算机;组织工程

### 基金资助:

国家自然科学基金(61571404, 61601412); 山西省高等学校优秀青年学术带头人支持计划

### 缩略语:

全变分: Total Variation, TV; 代数重建: algebraic recon-struction technique, ART; 交替方向乘子: Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM; 广义收缩: generalized soft-thresholding, GST; 凸 集投影: projection onto convex sets, POCS Song Jie, Master candidate, Shanxi Provincial Key Laboratory of Signal Capturing and Processing, North University of China, Taiyuan 030051, Shanxi Province, China

Corresponding author: Chen Ping, MD, Professor, Shanxi Provincial Key Laboratory of Signal Capturing and Processing, North University of China, Taiyuan 030051, Shanxi Province, China

### Reconstruction accuracy of sparse angle CT imaging: ADMM-CT algorithm based on LP-norm

Song Jie, Chen Ping, Pan Jin-xiao (Shanxi Provincial Key Laboratory of Signal Capturing and Processing, North University of China, Taiyuan 030051, Shanxi Province, China)

### Abstract

**BACKGROUND:** Sparse-view CT imaging reconstruction is an effective method for reducing radiation dosage. But the reconstruction accuracy affects its promotion in clinic.

**OBJECTIVE:** To explore the availability of the alternating direction method of multipliers (ADMM)-CT reconstruction algorithm based on LP-norm, so as to improve the reconstruction accuracy of sparse angle CT imaging.

**METHODS:** To solve the optimized problem with gradient prior constraint, translate the constrained optimized problem into unconstrained optimization problem in the method of augmented Lagrange. Then, the ADMM could achieve the target that decomposed the optimized model into three sub-problems, which were equivalent to the original problem. Finally, the steepest descent method and the generalized shrinkage algorithm were used to solve the sub-problem separately.

**RESULTS AND CONCLUSION:** (1) Compared with the traditional TV-POCS algorithm, ART-LP algorithm and Split-Bregman-LP algorithm, the root-mean-square error of the proposed algorithm was lower and the details of the reconstruction image were more complete when projection numbers were 36. (2) To conclude, for sparse angles CT reconstruction, the proposed algorithm named ADMM-LP can obtain high image quality.

Subject headings: Radiation Dosage; Tomography, X-Ray Computed; Tissue Engineering Funding: the National Natural Science Foundation of China, No. 61571404 and 61601412; a grant from the Excellent Young Academic Leader Program of Shanxi Provincial Universities

## 0 引言 Introduction

CT是一种被广泛应用于临床的诊断技术。然而,由于 CT设备在提高成像质量的同时,使用了更大的X射线剂量, 过量的X射线照射,存在诱发畸变、癌变及其他不良反应 的风险<sup>[1]</sup>。因此如何在保证图像质量的前提下有效降低射 线剂量成为近年来CT领域的研究热点<sup>[2]</sup>。

利用稀疏角度投影进行CT重建,是降低X射线辐射剂量 的方法之一<sup>[3]</sup>。Chang等<sup>[4]</sup>将压缩感知理论引入稀疏角度CT 重建中,提出了一种全变分最小迭代算法,该算法分别对投 影数据误差项和全变分(total variation, TV)正则项交替最小 化,取得了较好的重建效果。但文献[5-6]中指出,LP范数 (0<p<1)做为正则项可以取得相比TV正则项更强的稀疏约 束。因此, Sidky在文献[7]中提出了代数重建(algebraic recon-struction technique, ART)-TpV重建算法。许多的实 验证明ART-TpV在稀疏角度下的CT应用中表现出出色的重 建性能<sup>[8]</sup>。2014年, Chen等<sup>[9]</sup>将Split-Bregman(SB)算法用于 求解L12正则项最优化问题。该算法取得了比ART-TV更优的 重建效果、较好的抑制了条状伪影,但其收敛速度较慢[10-11]。 对于SB算法, 交替方向乘子法(alternating direction method of multipliers, ADMM)也是一种有效求解含约束最小化问题 的数值方法<sup>[12]</sup>。根据文献[13], Shen等<sup>[13]</sup>利用ADMM算法对 P范数(0<p<1)双正则项模型进行求解,在图像恢复领域取得 了较好的成果。受该文献启发,文章在LP范数正则项模型的 基础上,利用 ADMM 算法结合广义收缩 (generalized soft-thresholding,GST)算法对稀疏角度CT图像重建模型进 行求解,从而实现稀疏角度下的CT重建。

# 1 非凸非光滑的LP范数最小化模型 Non-convex non-smooth LP model

### 1.1 LP范数

*对于压缩感知模型*:  $P_0$ : min  $||x||_0$ , s.t Ax=b (1)

为简化求解,零范数可以被近似替换<sup>[14]</sup>。当0<p<1时,称  $\|\cdot\|_p$  为p范数,当*p*=1时,称  $\|\cdot\|_1$ 为1范数,当*p*=2,称  $\|\cdot\|_2$ 为2范数。以二维信号为例解释当0<p<1时,p范数的优点。假设Ax=b为空间中的一条直线,x=(x1,x2),以x1为横轴,x2为纵轴,则  $\|X\|_p = (x_1^p + x_2^p)^{1/p}, P_1$ 的解实际上为直线Ax = b与范数区域半径最小时的焦点。分别取*p*=0.7,*p*=1,*p*=2,通过matlab软件对3个范数作图,见**图**1。



图 1 通过 matlab 软件对 3 个范数作图 Figure 1 Construction on three norms through matab software

由图1可以看出,当0<p<1时,p范数是内凹的,区域 半径逐渐增大时与直线的焦点将位于坐标轴上,这个焦点 就是(2)式的解,并且该解满足稀疏条件。而对于*p*=1,范 数区域正好是个菱形,在一定条件下虽然也能得到稀疏解, 但并不一定是唯一解。同样的,对于2范数,在范数半径逐 渐增大的过程中,所求解为圆与直线相切的点,显然该解 不是最稀疏的解。综上,当0<p<1时,能获得比1范数、2 范数更稀疏且精确的解。

1.2 建立模型 求解不完全角度下的CT图像重建问题, 实际上就是求解一个欠定线性方程组Ax=b<sup>[15]</sup>。随着稀疏性 理论的研究和发展,有学者提出了通过求解优化模型获得 稀疏解的稀疏优化理论。通常情况下,待重建的图像大多 不具有稀疏性,于是研究者提出可通过某种变换基使得待 重建的图像在该变换基域下具有更稀疏的表示<sup>[16]</sup>。若Dx为 稀疏矩阵,b的维数M满足M=O(Klog(N/K)),N为x的维数, 并且测量矩阵A满足RIP条件时,欠定方程组可通过求解如 下优化问题几乎精确的恢复x<sup>[17]</sup>:

$$\min \| Dx \|_{p}, \text{ s.t } Ax = y \tag{2}$$

其中,D为梯度差分算子,A为测量矩阵,x为待重建 图像,b为投影。根据文献[18-19],LP范数(0<p<1)作为正 则项可以取得相比TV正则项更强的稀疏约束,故取0<p<1。 针对上述优化模型(1),为将约束优化问题转化为无约束优 化问题,文章提出利用ADMM算法进行求解。

# 2 ADMM-LP算法求解非凸优化模型 ADMM-LP algorithm for non-convex optimized model

对于优化问题(1)引入新变量,令*z*=Dx,那么(1)式就 等价于:

$$\min_{x} \| z \|_{p}, \text{ s.t } Ax = y, Dx = z$$
(3)

针对上述模型(2),其增广拉格朗日函数可以表示如下:

$$L (x, z; \upsilon, \lambda) = ||z||_{p}^{p} - \upsilon^{\mathrm{T}}(Ax - y) + \frac{\mu}{2} ||Ax - y||_{2}^{2}$$
$$-\lambda^{\mathrm{T}}(Dx - z) + \frac{\rho}{2} ||Dx - z||_{2}^{2}$$
(4)

其中υ和λ都是对偶变量, ρ和μ称为惩罚参数。 ADMM算法充分利用了目标函数的可分离性,将原问题分 解为若干个更容易得到全局解的交替极小化子问题进行分 析<sup>[20]</sup>。从而(3)式可拆分为:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \arg\min_{x} \left( -\upsilon^{T} (Ax - y) + \frac{\mu}{2} \| Ax - y \|_{2}^{2} - \lambda^{T} (Dx - z) + \frac{\rho}{2} \| Dx - z \|_{2}^{2} \right) \\ z_{k+1} = \arg\min_{x} \left( \| z \|_{p}^{p} - \lambda^{T} (Dx - z) + \frac{\rho}{2} \| Dx - z \|_{2}^{2} \right) \\ \upsilon_{k+1} = \upsilon - \frac{z}{\mu} (Az - y) \\ \lambda_{k+1} = \lambda - \rho (Dx - z) \end{cases}$$
(5)

2.1 x-子问题的求解 考虑第一个等式,将其称为x-子问题: "

$$\min_{x} Q_{k}(x) = -\nu^{T} (Ax - y) + \frac{\mu}{2} || Ax - y ||_{2}^{2} - \lambda^{T} (Dx - z_{k+1}) + \frac{\rho}{2} || Dx - z_{k+1} ||_{2}^{2}$$
(6)

显然Q(x)是一个二次函数,针对凸优化问题,通常选 择利用求导,导数为0的x便为所求的最优解,但是通过对x 求导:

 $d_{k}(x) = -A^{T}\upsilon + \mu A^{T}(Ax - y) - D^{T}\lambda + \rho D^{T}(Dx - z_{k+1})$  (7) 令导数为0,得到x的闭式解如下:

 $x_{k+1}^{*} = (\rho D^{T} D + \mu A^{T} A)^{+} (\rho D^{T} z_{k+1} + D^{T} \lambda + A^{T} \upsilon + \mu A^{T} y)$ (8)

其中包含一个伪逆矩阵,而伪逆矩阵的计算量十分庞 大,所以求导的方法并不理想,从而考虑使用迭代算法来 近似求解:利用最速下降法框架: $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$ 。其 中 $\alpha_k$ 是步长, $d_k$ 是下降方向,在每次更新x之后, $d_k$ 也 要随之更新。因为x的求解包含于ADMM的迭代框架中,所 以在子问题的求解过程可选择不精确的近似,若目标函数 满足Armigo条件,则可利用BB准则来确定 $\alpha$ 的大小<sup>[21]</sup>:

$$\alpha_k = \frac{s_k^T y_k}{y_k^T y_k} \qquad \text{if} \qquad \alpha_k = \frac{s_k^T s_k}{s_k^T u_k} \tag{9}$$

否则, 有 $\alpha_{k+1} = \rho \alpha_k$ , 其中  $0 < \rho < 1$ 。

2.2 z-子问题的求解 下面考虑第2个子问题(称为z-子问题):

 $z_{k+1} = \arg\min_{z} ||z||_{p}^{p} + \lambda^{T} (Dx - z) + \frac{\rho}{2} ||Dx - z||_{2}^{2}$  (10) 将乘子项与惩罚项进行完全平方,舍弃一些常数项后

最优化子问题可变形为:  

$$z_{k+1} = \arg\min \|z\|_p^p + \frac{\rho}{2} \|Dx - z - \frac{\lambda}{\rho}\|_2^2$$
 (11)  
计算广义较阈值函数:

$$\Gamma_p^{GST}(q;\varphi) = \begin{cases} 0, & |q| \le \tau_p^{GST}(\varphi) \\ \operatorname{sgn}(q) S_p^{GST}(|q|;\varphi), & |q| > \tau_p^{GST}(\varphi) \end{cases}$$
(12)

With, 
$$z^{k+1} = \Gamma_p^{GST}(Dx^k + \frac{\lambda}{\rho}, \delta)$$

对于公式(7),x迭代最小化的导数方向不仅同时兼顾 了投影及残差值反投影<sup>[22]</sup>,而且在分段常数的假设上对图 像平滑区域做修正。在此基础上,运用GST算法对z-子式 求解,根据文献[23],GST算法提供了一种灵活简单的计 算方式去逼近梯度图像的最优解。相比,ART算法是一种 逐线迭代的算法,在投影数量不完整的情况下方程组有无 数解,且如果投影数据含有噪声,其每个问题数据均会对x 的各个分量产生影响<sup>[14]</sup>。从而,文章所提出的算法拥有相 比ART-TV更高的抗噪性能。

# 3 仿真实验 Simulation test

为验证文章提出的ADMM-LP算法在稀疏角度下的重建 性能,采用标准head模型进行重建,并比较了TV-凸集投影 (projection onto convex sets, POCS)<sup>[22]</sup>、Split-Bregman-LP (SB-LP)<sup>[24]</sup>、ART-LP算法与ADMM-LP算法的重建结果<sup>[25]</sup>。 重建图像质量利用均方根误差(RMSE)来衡量<sup>[26]</sup>。RMSE的 值越低,说明重建效果越好。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{I+J} \sum_{i} \sum_{j} (f_{i,j} - f_{i,j}^{*})^{2}}$$
(13)

其中,  $f_{i,j}$ 表示原始图像的象素值,  $f_{i,j}^*$ 表示重建图像的象素值。

测试计算机的配置为AMD inter CORE i5-7200, 4 GB 内存,采用MATLAB2016a编程平台。文章提出算法的各 参数初始值选取: *p*=0.7, *μ*=2<sup>12</sup>, *ρ*=2<sup>9</sup>, *η*=0.999 5, *σ*=0.6, *λ*=0, *v*=0。TV-POCS算法及ART-LP算法图像初始值为 0,迭代松弛因子 *λ*均取1,梯度下降步长a取1。关于LP范 数中*p*值的选取,代表性的*p*值选取范围为0.5 < *p* < 0.8<sup>[13]</sup>, ART-LP算法与SB-LP算法P范数中p的取值与此文算法取 值均选取*p*=0.7。SB-LP算法中涉及的其他参数与文献[27] 一致。在实际投影和图像重建的过程中,噪声是不可避免 的。因此,数值模拟结果包括无噪声的重建与添加服从N(0, 0.1)的高斯噪声的重建。



图注: 图 A 为原图; B 为 TV-POCS; C 为 ART-LP; D 为 SB-LP; E 为 ADMM-LP。

图 2 分别由 TV-POCS、ART-LP、Split-Bregman、ADMM-LP 算法在 36 个不含噪声的投影数据下迭代 100 次的重建图像 Figure 2 Image reconstruction based on 36 unnoisy projection data after 100 times of iteration using TV-POCS, ART-LP, Split-Bregman and ADMM-LP



含 N(0, 0.1)的高斯噪声下获得 的重建图像 Figure 3 Reconstruction images under Gaussian noise (N: 0, 0.1)

图 3 各种算法在投影数据包

图注:图A为原图;B为TV-POCS;C为ART-LP;D为SB-LP;E为ADMM-LP。

3.1 无噪声重建 原始模型的象素为128×128,测试选择 探测器单元数量为154,扫描方式为扇束,在360°范围内 每间隔10°均匀采样,获取36个角度的投影数据做为仿真数 据进行重建,见**图2**。

图2为TV-POCS算法、ART-LP算法、SB-LP算法及本 文所提算法分别在36个投影角度下对标准head模型的重 建结果。从局部放大图可以清晰的观察到此文提出的算法 对于细节的保护能力突出,在相同的投影角度以及相同的 迭代次数下,文章提出的算法具有最小的RMSE值,且图 像轮廓清晰、细节完整。

3.2 噪声重建 图3为从360°均匀采集36个投影数据,并 添加服从N(0,0.1)的高斯噪声后,利用上述4种算法分别 迭代150次获取的重建结果。

如图2,3所示,文章所提算法在投影数据含有噪声、 迭代次数相同的情况下重建结果的视觉效果最清晰,且由 局部放大图显示,文章提出的算法具有更好的边缘保护效 果,数值精度更高。

由**表1**,**2**可知,ADMM-LP算法结果能达到4种算法中 最低的均方根误差,且相比SB-LP算法,ADMM-LP算法在 重建速度方面有一定的提升。

## 表 1 各种算法重建图像的均方根误差及时间对比

 Table 1
 Root mean square error and reconstruction time of different algorithms

项目	TV-POCS	ART-LP	SB-LP	ADMM-LP
均方根误差	0.072	0.054 9	0.065 9	0.004 5
重建时间 <b>(s)</b>	16	17	150	30

### 表 2 各种算法重建图像的均方根误差及时间对比

Table 2Root mean square error and reconstruction time ofdifferent algorithms

项目	TV-POCS	ART-LP	SB-LP	ADMM-LP
	(噪声)	(噪声)	(噪声)	(噪声)
均方根误差	0.072	0.081 8	0.073 1	0.040 2
重建时间(s)	25	26	185	89

# 4 实际数据实验 Actual data test

**图4**为TV-POCS算法、ART-LP算法、SB-LP算法及 ADMM-LP算法分别对胸部实际数据迭代100次所获取的重 建结果。投影采样方式为360°范围内均匀获取60个角度。 其中,ADMM算法的参数取值为: μ=2<sup>9</sup>,ρ=2<sup>7</sup>,其余参数 选取与上述参数值保持一致。TV-POCS及ART-LP算法中梯 度下降步长选取0.5。由图4局部放大图可看出,文章提出的 算法对图像的细节恢复更清晰,边缘保护效果更好。



图 4 分别由 TV-POCS、ART-LP、Split-Bregman、ADMM-LP 算法 在 60 个不含噪声的胸部投影数据下迭代 100 次的重建图像 Figure 4 Image reconstruction based on 60 unnoisy projection data after 100 times of iteration using TV-POCS, ART-LP, Split-Bregman and ADMM-LP

图注:图A为TV-POCS;B为ART-LP;C为SB-LP;D为ADMM-LP。

### 5 讨论及结论 Discussion and conclusion

研究证明,带有正则项的迭代重建框架在稀疏角度重 建过程中可有效的抵制噪声,而对噪声抑制性能最关键的 部分便是正则项的选取<sup>[28]</sup>。众所周知,TV正则项是一种稀 疏角度重建过程中有效降低噪声、减少硬化伪影的方法, 然而,利用TV正则项进行的稀疏角度重建,边缘保护效果 薄弱且块状伪影仍会存在<sup>[29]</sup>。LO范数只计算图像梯度的非 零元个数,其对梯度的惩罚效果最稳定,是最佳的正则 项<sup>[30]</sup>。但由于LO范数的非凸计算过于复杂,因此文章提出 利用LP范数来代替LO范数,LP范数相比TV范数更迫近于 LO范数,可以取得相比TV范数更好的边缘保护效果。

文章从降低CT辐射剂量的角度出发,探索LP范数正则 项在稀疏角度CT重建中减少块状伪影、保护边缘的能力, 以达到在稀疏角度下重建高质量图像的目的。图像梯度的 LP范数被用来作为图像稀疏性的正则化约束。在CS理论框 架下,建立以LP范数(0<p<1)为正则项的CT重建模型,为 有效求解该模型,提出了适用该模型的优化算法,即 ADMM-LP算法。ADMM算法也即交替方向乘子法是一种 求解优化问题的计算框架,适用于求解分布式凸优化问题, 特别是统计学习问题。 ADMM 通过分解协调 (Decomposition-Coordination)过程,将大的全局问题分解 为多个较小、较容易求解的局部子问题,并通过协调子问 题的解而得到大的全局问题的解,该算法在模型建立完成 后,可用于间接的保证重建图像满足观测方程。LP范数主 要用于减少迭代过程中由于数据不完备而产生的伪影[31]。 文章提出的算法可将目标函数拆分成一些更为简单的子问 题分步迭代求解,成功将计算复杂度从整体的非凸多元函 数,降低到针对变量的子问题的上,完成了对LP范数最优 化的有效求解。通过数值实验验证, ADMM-LP算法在相同 的迭代次数下总能获取最小的RMSE值,且重建图像的视 觉效果最好。在投影含噪声的重建过程中,文章提出的算 法具有一定的抗噪性能,重建图像轮廓完整,仍具有最小 的RMSE值。从各重建图的局部放大图可以看出, ADMM-LP算法对边缘的保护能力最强,且伪影较少。

**致谢**:首先要感谢陈平老师以及潘晋孝老师的大力支持和悉心指点, 此外还要感谢朋友以及同学们在论文编写中给予的鼓励和支持,最后谢谢 论文评阅老师们的辛苦工作。

*作者贡献*:宋洁、陈平构思并设计实验,宋洁负责实验实施及起草初稿,陈平、潘晋孝负责实验分析:陈平负责言语润色,陈平、潘晋孝批准 了最终版本。

经费支持: 该文章接受了"国家自然科学基金(61571404, 61601412) 和山西省高等学校优秀青年学术带头人支持计划"的基金资助。所有作者 声明,经费支持没有影响文章观点和对研究数据客观结果的统计分析及其 报道。

*利益冲突*: 文章的全部作者声明,在课题研究和文章撰写过程中不存 在利益冲突。

机构伦理问题:无涉及伦理冲突的内容。

**写作指南:**该研究遵守国际医学期刊编辑委员会《学术研究实验与报告和医学期刊编辑与发表的推荐规范》。

**文章查重**: 文章出版前已经过专业反剽窃文献检测系统进行3次查重。 **文章外审:** 文章经小同行外审专家双盲外审,同行评议认为文章符合 期刊发稿宗旨。

**生物统计学声明:** 文章未利用统计学方法。

**文章版权:** 文章出版前杂志已与全体作者授权人签署了版权相关协议。

*开放获取声明*:这是一篇开放获取文章,根据《知识共享许可协议》 "署名-非商业性使用-相同方式共享4.0"条款,在合理引用的情况下, 允许他人以非商业性目的基于原文内容编辑、调整和扩展,同时允许任何 用户阅读、下载、拷贝、传递、打印、检索、超级链接该文献,并为之建 立索引,用作软件的输入数据或其它任何合法用途。

### 6 参考文献 References

- [1] Ma J, He J, Wang Y, et al. LdCT-Net: low-dose CT image reconstruction strategy driven by a deep dual network[C]// Physics of Medical Imaging. 2018:124.
- [2] Zhao H, Zhou YL, Zheng GL, et al. Effect of iterative reconstruction technique on image quality and radiation dose of head and neck artery CT angiography. Hainan Med J. 2017.
- [3] Ding Y, Hu T. Efficient scheme of low-dose CT reconstruction using TV minimization with an adaptive stopping strategy and sparse dictionary learning for post-processing. Front Inform Technol Electr Eng. 2017;18(12):2001-2008.

- [4] Chang M, Li L, Chen Z, et al. A few-view reweighted sparsity hunting (FRESH) method for CT image reconstruction. J X-ray Sci Technol. 2013;21(2):161.
- [5] Chartrand R. Exact reconstruction of sparse signals via non-convex minimization. IEEE Signal Lett. 2007;14: 707-710.
- [6] Nikolova M, Ng MK, Zhang S, et al. Efficient reconstruction of piece-wise constant images using non-smooth non-convex minimization. SIAM J Imaging Sci. 2008;1: 2-25.
- [7] Sidky EY, Pan X, Reiser IS, et al. Enhanced imaging of microcalcifications in digital breast tomosynthesis through improved image-reconstruction algorithms. Med Phys. 2009;36(11):4920.
- [8] 齐宏亮. 有限投影数据CT图像迭代重建技术研究[D].广州:南方医科大学, 2017.
- [9] Chen M, Mi D, He P, et al. A CT reconstruction algorithm based on L1/2 regularization. Comput Math Methods Med. 2014;2014:862910.
- [10] Kim JH, Akram F, Choi KN. Image denoising feedback framework using split bregman approach. Expert Systems Appl. 2017.
- [11] Shen Y, Li Y, Mathematics SA. A new split bregman method with variate step for image deblurring and denoising with impulse noise. J Num Methods Comp Appl. 2018.
- [12] 王慧慧. 分布式交替方向乘子法研究[D]. 南京:南京大学, 2017.
- [13] Shen Z, Cheng LS. A coupled Image restoration model with non-convex non-smooth I\_p wavelet frame and TV regularization. let Image Proc. 2016.
- [14] 蒋沅,苗生伟,罗华柱,等. Lp范数压缩感知图像重建优化算法[J]. 中国图 象图形学报, 2017,22(4):435-442.
- [15] Tang Y. A new approach to solving the prior image constrained compressed sensing (PICCS) with applications in CT image reconstruction. Proc Spie. 2017;132:101322.
- [16] 詹雪薇.稀疏角度CT重建的正则化方法研究[D].太原:中北大学, 2017.
- [17] 汪星星,李国成. 基于反馈神经网络的稀疏信号恢复的优化算法[J]. 计算 机应用, 2017, 37(9):2590-2594.
- [18] Wang B, Wan W, Wang Y, et al. An Lp(0 ≤p≤1)-norm regularized image reconstruction scheme for breast DOT with non-negative-constraint. Biomed Eng Online. 2017;16(1):32.
- [19] 马敏,郭琪,闫超奇,等. 基于I2,p-范数的ECT图像重建算法[J].计量学报, 2017, 38(5):611-615.
- [20] Wang H, Lu C, Zhou J, et al. Orthogonal projection non-negative matrix factorization using alternating direction method of multipliers. J Image Graphics. 2017.
- [21] Barzilai J,Borwein JM.Two-point step size gradient methods. IMA J Num Anal. 1988;8(1):141-148.
- [22] Liu L, Lin W, Jin M. Reconstruction of sparse-view X-ray computed tomography using adaptive iterative algorithms. Pergamon Press, Inc. 2015.
- [23] 韩永欣,王建,刘立,等. 基于交替投影的CT图像重建算法[J]. 中国医学影像技术, 2016, 32(10):1592-1596.
- [24] She Y. Thresholding-based iterative selection procedures for model selection and shrinkage. ElectrJ Stat. 2009;3:384-415.
- [25] 吴长岳,孔慧华. 基于Lp算子的CT迭代重建算法研究[J]. 核电子学与探 测技术,2014,34(4):509-512.
- [26] Chen H, Zhang Y, Zhang W, et al. Low-dose CT via convolutional neural network. Biomed Optics Exp. 2017;8(2):679.
- [27] 张丹丹. Split-Bregman算法在CT重建中的应用研究[D].太原:中北大学, 2016.
- [28] 牛善洲. 基于变分正则化的低剂量CT成像方法研究[D].广州:南方医科大学, 2015.
- [29] Yu W, Wang C, Huang M. Edge-preserving reconstruction from sparse projections of limited-angle computed tomography using to-regularized gradient prior. Rev Sci Instrum. 2017;88(4):043703.
- [30] 余维. 不完备投影数据的CT重建算法研究[D]. 重庆:重庆大学, 2014.
- [31] 李镜,孙怡. 基于L1范数的微分相位衬度CT稀疏角度重建算法[J]. 光学 学报, 2012, 32(3):70-76.